FLÄCHENTHEORETISCHE INTEGRALSÄTZE

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
GENEHMIGT VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

EDMUND SCHOLZ
AUS BERLIN

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 21. JULI 1932
TAG DER PROMOTION: 12. JULI 1933

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

REFERENTEN:
PROFESSOR DR. L. BIEBERBACH
PROFESSOR DR. E. SCHMIDT

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin“ / Band I

Einleitung.

Die Greensche Integralformel führt zu einigen bisher nicht beachteten Integralidentitäten für die in der gewöhnlichen Flächentheorie vorkommenden Vektorfelder. Man gewinnt so eine einheitliche Methode zur Herleitung vieler sonst aus den verschiedensten Überlegungen sich ergebenden Resultate der Flächentheorie. U. a. werden so gewisse bekannte Tatsachen über Minimalflächen, Eiflächen, geodätische Krümmung, geodätische Torsion in neuer vereinfachter Weise gewonnen. Gelegentlich ergibt sich dabei auch Neues, so z. B. der Satz: Das Hauptnormalenbild jeder Schar geschlossener Raumkurven hat den Inhalt Null.

Zur Bezeichnungsweise sei bemerkt, daß das innere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, das äußere Produkt mit $\mathfrak{x}\times\mathfrak{y}$, das gemischte Produkt $(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})\mathfrak{z}$ von drei Vektoren auch mit $(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ oder $\{\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}\}$ bezeichnet wird. Eckige Klammern haben folgende Bedeutung:

Partielle Ableitungen werden in üblicher Weise durch Indizes gekennzeichnet. Eine Funktion F hänge von mehreren, durch Indizes bezeichneten partiellen Ableitungen irgendwelcher Größen ab. In dieser Arbeit werden nur Funktionen von zwei Veränderlichen betrachtet. Dann bedeutet $[F]$ den Ausdruck $F - F^*$, wobei F^* aus F dadurch hervorgeht, daß man die beiden Indizes, die Ableitungen bedeuten, überall wo sie vorkommen, formal miteinander vertauscht. So wäre z. B.

$$[F] = [(A_u - B)_v \cdot f(g_u, h_v)] = (A_u - B)_v \cdot f(g_u, h_v) - (A_v - B)_u \cdot f(g_v, h_u).$$

§ 1. Ableitung der Fundamentalformeln.

Es seien F und G zwei in einem gewissen Bereich Γ der u, v-Ebene definierte und als genügend oft differentiierbar vorausgesetzte Funktionen von u und v. Ferner sei C samt Rand R ein Teilbereich von Γ, wobei R aus Stücken analytischer Kurven zusammengesetzt sein soll. Dann lautet die Greensche Formel

$$\int_{\overset{\frown}{C}R} F\,du + G\,dv = \iint_C (G_u - F_v)\,du\,dv, \tag{1}$$

wobei das links stehende Kurvenintegral im positiven Umlaufssinne um C genommen wird.

Bemerkung 1: Wenn im folgenden in einer Gleichung die Integrale nicht mit dem Integrationsgebiet versehen sind, gilt die Gleichung für einen beliebigen den Anforderungen des Satzes genügenden Bereich C. Alle in derselben Gleichung auftretenden Doppelintegrale sind dann über C zu nehmen, und alle einfachen Integrale der Gleichung sind dann als im positiven Sinne über den Rand R von C genommene Kurvenintegrale zu betrachten.

Bemerkung 2: Ich habe in dieser Arbeit kein Interesse daran, bei den vielen folgenden Anwendungen jedesmal hinreichende Bedingungen aufzuzählen, unter denen die Formeln gelten, sondern setze stillschweigend voraus, daß alle Größen genügend oft differentiierbar sein sollen.

Die Funktionen A und B, von denen jede derselben ein Skalar oder Vektor sein kann, mögen von zwei Parametern u und v abhängen. Wir bilden

$$dA \cdot B = (A_u du + A_v dv) B = A_u B du + A_v B dv$$

und wandeln nach der Greenschen Formel das Kurvenintegral $\int dA \cdot B$ in das entsprechende Doppelintegral um. Es kommt

$$\int dA \cdot B = \iint \{(A_v B)_u - (A_u B)_v\} du dv = \iint [(A_v B)_u] du dv.$$

Durch weitere Ausdifferentiierung des Integranden des Doppelintegrals und indem man alles auf eine Seite bringt, ergibt sich

$$\int dA \cdot B + \iint [A_u B_v] du dv + \iint [A_{uv}] B du dv = 0. \tag{2}$$

Selbstverständlich gehen wir mit den Differentiierbarkeitsbedingungen immer so weit, daß

$$[A_{uv}] = A_{uv} - A_{vu} = 0$$

ist, wodurch aus (2) folgt

$$\int dA \cdot B + \iint [A_u B_v] du dv = 0. \tag{I}$$

Diese Gleichung bezeichne ich als *erste Fundamentalformel.*

Bemerkung 3: Man sieht sofort: Wenn $u = u(r, s)$; $v = v(r, s)$ mit

$$u_r v_s - u_s v_r = [u_r v_s] \neq 0$$

eine Transformation der u, v-Parameter in die r, s-Parameter bedeutet, ergibt sich für $[A_u B_v]$ die Transformation

$$[A_u B_v]\,[u_r v_s] = [A_r B_s]. \tag{3}$$

Bemerkung 4: Wenn von dem gemischten Produkt $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{y}_v, \mathfrak{z})$ die alternierende Summe $A = [(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{y}_v, \mathfrak{z})]$ gebildet wird, kann man ohne weiteres die runden Klammern fortlassen und definieren

$$[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{y}_v, \mathfrak{z}] = (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{y}_v, \mathfrak{z}) - (\mathfrak{x}_v, \mathfrak{y}_u, \mathfrak{z}). \tag{4}$$

Ein Spezialfall hiervon ist (wenn man $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ annimmt)

$$[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{z}] = 2(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{z}). \tag{5}$$

Aus (I) leite ich durch zwei einfache Transformationen noch zwei andere Beziehungen ab, die ich bequemerweise als zweite und dritte Fundamentalformel bezeichne, obwohl sie genau genommen nur spezielle Fälle von (I) sind.

$\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ mögen drei beliebige Vektoren sein, die je von u und v abhängen sollen. In (I) identifizieren wir zuerst A mit $\mathfrak{x}$ und B mit $(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y})$, wodurch (I) die Gestalt

$$\int (d\mathfrak{x}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \iint [\mathfrak{x}_u (\mathfrak{x} \times \mathfrak{y})_v] \, du\, dv = 0$$

annimmt. Durch weitere Ausführung der Differentiationen wird aus dieser Gleichung sofort nach (4) und (5)

$$\text{(II)} \quad \int (d\mathfrak{x}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + 2 \iint (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{y})\, du\, dv + \iint [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}_v]\, du\, dv = 0.$$

Ebenso leicht sieht man: Wenn A mit $\mathfrak{x}$ und B mit $(\mathfrak{y} \times \mathfrak{z})$ identifiziert wird, entsteht aus (I)

$$\text{(III)} \quad \int (d\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) + \iint [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{y}_v, \mathfrak{z}]\, du\, dv + \iint [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}_v]\, du\, dv = 0.$$

Wenn ich annehme, daß in (III) $\mathfrak{z}$ ein beliebiger konstanter Vektor ist, wird das dritte Integral gleich Null, und aus den übrigen beiden Integralen läßt sich $\mathfrak{z}$ vor die Integralzeichen ziehen, so daß man erhält

$$\mathfrak{z} \left\{ \int d\mathfrak{x} \times \mathfrak{y} + \iint [\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v]\, du\, dv \right\} = 0.$$

Weil $\mathfrak{z}$ beliebig ist, folgt hieraus

$$\text{(III a)} \qquad \int d\mathfrak{x} \times \mathfrak{y} + \iint [\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v]\, du\, dv = 0,$$

und wenn $\mathfrak{x}$ gleich $\mathfrak{y}$ gesetzt wird,

$$\text{(II a)} \qquad \int d\mathfrak{x} \times \mathfrak{x} + 2 \iint (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)\, du\, dv = 0.$$

Die Fundamentalformeln (I) *bis* (III) *bilden die Grundlage der nächsten Betrachtungen.*

§ 2. Das Flächenelement, die Gaußsche und die mittlere Krümmung.

In den flächentheoretischen Integralsätzen spielen die Gausssche und die mittlere Krümmung eine Hauptrolle. Die in der Differentialgeometrie beliebte Methode, alle flächentheoretischen Fragen formal auf die Betrachtung zweier quadratischer Fundamentalformen zurückzuführen, liefert natürlich die obengenannten Größen als Funktionen der Koeffizienten dieser Formen bzw. ihrer Ableitungen. Den so erhaltenen Größen sieht man es sofort an, daß sich nicht leicht

ein Zusammenhang zwischen ihnen und unseren Fundamentalformeln (I) bis (III) herstellen läßt. Wir werden vielmehr gezwungen sein, auf direktem Wege für die Krümmungselemente vektorielle Ausdrücke zu suchen, die wir gebrauchen können.

Wir denken uns eine Fläche bzw. ein Flächenstück in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^*, v^*)$ als Funktion der Parameter u^* und v^* gegeben, so daß immer $\mathfrak{x}_{u^*} \times \mathfrak{x}_{v^*} \neq 0$ ist. In jedem Punkt der Fläche ist durch diese Darstellung eindeutig der Normaleneinheitsvektor

$$\xi = \frac{\mathfrak{x}_{u^*} \times \mathfrak{x}_{v^*}}{\sqrt{(\mathfrak{x}_{u^*} \times \mathfrak{x}_{v^*})^2}}$$

bestimmt. Wenn wir neue Parameter durch

$$u^* = u^*(u, v); \qquad v^* = v^*(u, v) \tag{6}$$

einführen, nehmen wir nicht etwa einen neuen Normalenvektor $\frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}}$, sondern lassen den durch die u^*, v^*-Parameterdarstellung gegebenen Vektor ξ auch für das u, v-System gelten, d. h. *wir betrachten den Vektor ξ nachträglich als eine von der Parameterdarstellung der Fläche unabhängige selbständige Größe.* Wir führen ferner für die Transformation (6) keinerlei Beschränkung ein, so daß die Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ beliebig auf der Fläche umherlaufen können. Die Größe

$$d\sigma = (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)\, du\, dv, \tag{6a}$$

die wir das „Flächenelement des Kurvennetzes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$" nennen, kann dann sowohl positiv wie negativ werden, wenn ich mich irgendwie in der u, v-Ebene bewege. Das Integral $F = \iint d\sigma$ nennen wir den „Flächeninhalt eines Bereichs des u, v-Kurvennetzes".

Wenn wir nichts besonderes sagen, setzen wir bei den folgenden Formeln immer solch ein allgemeines Parametersystem voraus.

Um die für unsere Zwecke geeigneten Ausdrücke für die Krümmungen zu erhalten, suche ich die Fokalflächen der Normalenkongruenz der Fläche $\mathfrak{x}$ zu berechnen, d. h. ich suche die Funktion $\lambda = \lambda(u, v)$ so zu bestimmen, daß die Fläche $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \lambda\xi$ in jedem durch ein Wertepaar (u, v) bestimmten Punkte von der entsprechenden Normalen der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ berührt wird, was die Bedingung

$$(\mathfrak{y}_u, \mathfrak{y}_v, \xi) = ((\mathfrak{x} + \lambda\xi)_u, (\mathfrak{x} + \lambda\xi)_v, \xi) = 0$$

oder, weiter ausgeführt,

$$(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi) + [\mathfrak{x}_u, \xi_v, \xi]\lambda + (\xi_u, \xi_v, \xi)\lambda^2 = 0$$

nach sich zieht. Die beiden Werte von λ, die dieser Gleichung ge-

nügen, sind die beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 von $\mathfrak{x}$, und man hat

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{R_1 R_2} = \dfrac{(\xi_u, \xi_v, \xi)}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)} = K = \text{Gausssche Krümmung}, \\ \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = -\dfrac{[\mathfrak{x}_u, \xi_v, \xi]}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)} = M = \text{mittlere Krümmung}. \end{cases}$$

§ 3. Anwendung der Fundamentalformeln auf den Flächeninhalt, die Gaußsche und die mittlere Krümmung.

Bemerkung 5: Im folgenden verwenden wir ständig einige triviale vektorielle Identitäten. Gegeben seien drei Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ und ein Einheitsvektor ξ, der auf $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ senkrecht steht. Es ist dann

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} \times \mathfrak{y} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \xi)\, \xi & \text{und} \\ (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \xi)\, (\mathfrak{z}\xi). \end{cases}$$

In den Formeln (II) und (IIIa) möge $\mathfrak{x}$ den Flächenvektor selbst und $\mathfrak{y}$ den dazugehörigen Normaleneinheitsvektor ξ darstellen. Man erhält

$$\int (d\mathfrak{x}, \mathfrak{x}, \xi) + 2\iint (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)\, du\, dv + \iint [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}, \xi_v]\, du\, dv = 0,$$

$$\int d\mathfrak{x} \times \xi + \iint [\mathfrak{x}_u \times \xi_v]\, du\, dv = 0.$$

Die Vektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, ξ_u, ξ_v stehen auf ξ senkrecht. Nach (6a), (8) und (7) hat man sofort

$$[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}, \xi_v]\, du\, dv = \frac{[\mathfrak{x}_u, \xi, \xi_v]\, (\mathfrak{x}\xi)}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)}\, (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)\, du\, dv = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) (\mathfrak{x}\xi)\, d\sigma$$

und

$$[\mathfrak{x}_u \times \xi_v]\, du\, dv = -\frac{[\mathfrak{x}_u, \xi, \xi_v]\, \xi}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)}\, (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)\, du\, dv = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \xi\, d\sigma,$$

wodurch unsere beiden Integralbeziehungen die Gestalt

$$(9)\quad \int (d\mathfrak{x}, \mathfrak{x}, \xi) + 2\iint d\sigma + \iint \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) (\mathfrak{x}\xi)\, d\sigma = 0,$$

$$(10)\quad \int d\mathfrak{x} \times \xi - \iint \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \xi\, d\sigma = 0$$

annehmen. Wenn man in (II) für $\mathfrak{x}$ den Vektor ξ und für $\mathfrak{y}$ den Flächenvektor $\mathfrak{x}$ einsetzt, erhält man

$$\int (d\xi, \xi, \mathfrak{x}) + 2\iint (\xi_u, \xi_v, \mathfrak{x})\, du\, dv + \iint [\xi_u, \xi, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv = 0.$$

Aus denselben Gründen wie soeben gilt nun

$$(\xi_u, \xi_v, \mathfrak{x})\, du\, dv = \frac{(\xi_u, \xi_v, \xi)}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)}\, (\mathfrak{x}\xi)\, (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)\, du\, dv = \frac{1}{R_1 R_2}\, (\mathfrak{x}\xi)\, d\sigma$$

und

$$[\xi_u, \xi, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) d\sigma,$$

so daß unsere Integralbeziehung zu

$$(11) \qquad \int (d\xi, \xi, \mathfrak{x}) + 2\iint \frac{1}{R_1 R_2} (\mathfrak{x}\xi)\, d\sigma + \iint \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) d\sigma = 0$$

wird. Bedeutet schließlich in (IIa) $\mathfrak{x}$ den Flächenvektor selbst, dann erhalten wir nach (6a) und (8)

$$(12) \qquad \int d\mathfrak{x} \times \mathfrak{x} + 2\iint \xi\, d\sigma = 0.$$

§ 4. Minimalflächen.

Wir denken uns eine Flächenschar in der Form

$$(13) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v; w)$$

gegeben, w sei der Scharparameter, und betrachten das Integral

$$J = \iint d\sigma = \iint (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)\, du\, dv$$

innerhalb eines einfach geschlossenen Bereiches der u, v-Ebene. Die Ableitung von J nach w ist

$$J_w = \iint (\mathfrak{x}_{wu}, \mathfrak{x}_v, \xi)\, du\, dv + \iint (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{wv}, \xi)\, du\, dv + \iint (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi_w)\, du\, dv.$$

Der dritte Term auf der rechten Seite verschwindet, weil $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ und ξ_w auf ξ senkrecht stehen, und es bleibt

$$(14) \qquad J_w = \iint [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{(w)v}, \xi]\, du\, dv.$$

Um anzudeuten, daß sich die alternierende Wirkung der Klammern nur auf u und v und nicht mehr auf den dritten Index w erstrecken soll, wird w in runde Klammern gesetzt. Setzt man in (III) für die Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_w$ und ξ ein, dann erhält man

$$(15) \qquad \int (d\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_w, \xi) + J_w + \iint [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{(w)}, \xi_v]\, du\, dv = 0.$$

Nach (6a), (7) und (8) ist wieder

$$[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{(w)}, \xi_v]\, du\, dv = [\mathfrak{x}_u, \xi, \xi_v]\, (\mathfrak{x}_w \xi)\, du\, dv = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) (\mathfrak{x}_w \xi)\, d\sigma,$$

so daß aus (15) wird

$$(16) \qquad \int (d\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_w, \xi) + J_w + \iint \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) (\mathfrak{x}_w \xi)\, d\sigma = 0.$$

Wenn man eine spezielle Flächenschar von der Form

$$(17) \qquad \mathfrak{x}(u, v; w) = \mathfrak{x}_0(u, v) + w \cdot f(u, v) \cdot \xi(u, v)$$

behandelt, wobei f irgendeine Funktion von u und v und ξ der Normalvektor von $\mathfrak{x}_0$ ist, hat man $\mathfrak{x}_w = f \cdot \xi$, und für $w = 0$ liefert (16)

$$(18) \qquad J_w + \iint \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) f\, d\sigma = 0,$$

wobei alle Größen auf die Fläche $\mathfrak{x}_0$ bezogen gedacht sind. Aus (18) entnimmt man: *die Flächen, für die die erste Variation der Oberfläche immer verschwindet, müssen der Bedingung*

$$M = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

genügen. Denn andernfalls brauchte man f nur so zu wählen, daß es außer den vielleicht geforderten Stetigkeits- und Randbedingungen immer das Vorzeichen von $M\,d\sigma$ besitzt. Dann ist der Integrand von (18) nie kleiner als Null und mindestens in einem Punkte von Null verschieden, da in dem Gebiet, wo $M \neq 0$ ist, nicht überall $d\sigma = 0$ sein kann, so daß damit wegen der Stetigkeit des Integranden $J_w \neq 0$ ist.

Tragen wir nun die Bedingung $M = 0$ in die Formel (9) ein, dann erhalten wir die bekannte Gleichung

$$\int (d\mathfrak{x}, \mathfrak{x}, \xi) + 2\iint d\sigma = 0, \tag{19}$$

die bei einer Minimalfläche den Flächeninhalt eines Bereichs der Fläche durch ein Randintegral um diesen Bereich darstellt. Aus (10) entnehmen wir: *notwendig und hinreichend dafür, daß eine Fläche eine Minimalfläche ist, ist das Bestehen der Gleichung*

$$\int d\mathfrak{x} \times \xi = 0 \tag{20}$$

für jede geschlossene Kurve der Fläche. (20) ist äquivalent mit den bekannten Schwarzschen Gleichungen. *Es ist interessant, aus welch einfacher reeller Quelle diese Sätze fließen, die man sonst mit Hilfe der Funktionentheorie abzuleiten pflegt.*

Wir nehmen den Ursprung des räumlichen Koordinatensystems in der zu betrachtenden Minimalfläche für die Parameterwerte (0, 0) an, d. h. es soll

$$\mathfrak{x}(0,0) = 0$$

sein. Nach (20) ist das Integral

$$\mathfrak{y}(u,v) = -\int_{0,0}^{u,v} d\mathfrak{x} \times \xi \tag{21}$$

vom Wege unabhängig, desgleichen trivialerweise das Integral

$$\mathfrak{x}(u,v) = \int_{0,0}^{u,v} d\mathfrak{x}. \tag{22}$$

Wenn φ eine beliebige Konstante ist, dann ist

$$(23) \qquad \mathfrak{x}\cos\varphi + \mathfrak{y}\sin\varphi = \int_{0,0}^{u,v} d\mathfrak{x}\cos\varphi - (d\mathfrak{x}\times\xi)\sin\varphi = \mathfrak{z}(u,v)$$

vom Wege unabhängig. Nun ist aber

$$d\mathfrak{z} = d\mathfrak{x}\cos\varphi - (d\mathfrak{x}\times\xi)\sin\varphi$$

das Differential von $\mathfrak{z}$, und man sieht, daß $d\mathfrak{z}$ auf ξ senkrecht steht. Weiter ist

$$d\mathfrak{z}\times\xi = (d\mathfrak{x}\times\xi)\cos\varphi - \{(d\mathfrak{x}\times\xi)\times\xi\}\sin\varphi = (d\mathfrak{x}\times\xi)\cos\varphi + d\mathfrak{x}\sin\varphi,$$

woraus man nach (21) und (22) ableitet, daß für jede geschlossene Kurve immer

$$\int d\mathfrak{z}\times\xi = \cos\varphi\int d\mathfrak{x}\times\xi + \sin\varphi\int d\mathfrak{x} = 0$$

ist. D. h. aber nach (20), $\mathfrak{z}$ ist eine Minimalfläche, da ja ξ auch die Flächennormale für $\mathfrak{z}$ ist. Die Flächenschar

$$\mathfrak{z}(u,v;\varphi) = \mathfrak{x}\cos\varphi + \mathfrak{y}\sin\varphi$$

(φ = Parameter) ist die Schar der zu $\mathfrak{x}$ assoziierten Minimalflächen und $\mathfrak{y}$ die zu $\mathfrak{x}$ adjungierte Minimalfläche.

Wir können auf der $\mathfrak{x}$-Fläche, wie bekannt, ein isotherm rechtwinkliges Parametersystem wählen, so daß

$$(24) \qquad \mathfrak{x}_u^2 = \mathfrak{x}_v^2; \qquad \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v = 0; \qquad (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi) > 0$$

ist. In diesem speziellen Fall entnimmt man ohne weiteres aus (21) und (24) die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\mathfrak{y}_u = -\mathfrak{x}_u\times\xi = \mathfrak{x}_v; \qquad \mathfrak{y}_v = -\mathfrak{x}_v\times\xi = -\mathfrak{x}_u,$$

d. h. $\mathfrak{z} = \mathfrak{y} + i\mathfrak{x} = \mathfrak{z}(u+iv) = \mathfrak{z}(z)$ ist eine Funktion der komplexen Veränderlichen $z = u + iv$. Eine triviale Rechnung liefert $(\mathfrak{z}_z)^2 = 0$, d. h. $\mathfrak{z}$ ist eine isotrope Kurve.

§ 5. Eiflächen.

Bemerkung 6: In der Weise, wie wir $d\sigma$ definiert haben, sind die Integralbeziehungen (9) bis (12) vom Parameternetz abhängig. Wenn jedoch im Integrationsgebiet $d\sigma > 0$ ist und die Bestandteile der Integranden stetig sind, kann man bekanntlich zu einer allgemeineren Integraldefinition übergehen und unter $d\sigma$ ein weitgehend beliebig geformtes an kein Parameternetz gebundenes Flächenelement verstehen.

Ich denke mir eine endliche geschlossene Fläche, die den Raum in ein Inneres und ein Äußeres teilt. Der Normaleneinheitsvektor ξ sei beim Fortschreiten auf der Fläche stetig und möge in Richtung zum Äußeren hinzeigen. Ich teile die Oberfläche in endlich viele

einfach zusammenhängende Felder ein, deren Ränder aus stückweis glatten Kurven gebildet sind. Mit Hilfe von ξ ist dann für jedes Feld ein positiver Umlaufssinn bestimmt. Jedes Feld überdecke ich für sich mit irgendeinem Parameternetz, so daß immer $d\sigma > 0$ ist. Wenn ich nun irgendeine der Integralbeziehungen (9) bis (12) auf jedes Feld anwende, nach Bemerkung 6 die Integrale allgemeiner als Oberflächenintegrale deute und alle von den einzelnen Feldern erhaltenen Beziehungen addiere, heben sich die Randintegrale fort, weil jedes Randstück zweimal entgegengesetzt durchlaufen wird, und es bleibt eine Beziehung zwischen über die ganze Fläche erstreckten Oberflächenintegralen zurück.

Ich will nur Anwendungen über analytische Eiflächen bringen. Wenn man $-R_1 = r_1$ und $-R_2 = r_2$ setzt, sind r_1 und r_2 nicht negativ, weil, da ξ nach außen zeigt, R_1 und R_2 nicht größer als Null sind. *Die Formeln* (9) *bis* (12) *liefern nach der eben besprochenen Operation folgende wichtige Gleichungen* (in denen alle Integrale über die ganze Eifläche zu erstrecken sind):

$$2\iint d\sigma = \iint \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)(\mathfrak{x}\xi)\, d\sigma, \tag{25}$$

$$0 = \iint \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\xi\, d\sigma, \tag{26}$$

$$2\iint \frac{1}{r_1 r_2}(\mathfrak{x}\xi)\, d\sigma = \iint \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) d\sigma, \tag{27}$$

$$0 = 2\iint \xi\, d\sigma. \tag{28}$$

Auf der Eifläche sei nun

$$M = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{const}. \tag{29}$$

Multipliziert man die Gleichung (25) mit M und (27) mit 2 und addiert, so erhält man

$$4\iint \frac{1}{r_1 r_2}(\mathfrak{x}\xi)\, d\sigma = \iint \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2 (\mathfrak{x}\xi)\, d\sigma,$$

oder, indem man alles auf eine Seite bringt,

$$\iint \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 (\mathfrak{x}\xi)\, d\sigma = 0. \tag{30}$$

Wähle ich den Ursprung des räumlichen Koordinatensystems im Innern der Eifläche, so hat $(\mathfrak{x}\xi)$, dessen geometrische Bedeutung

gleich dem Abstand des Ursprungs von der zu $\mathfrak{x}$ gehörigen Tangentialebene ist, immer positives Vorzeichen und ist mindestens an einem Punkte verschieden von Null. Dann folgt aus (30), daß

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^2=0,$$

oder unter Berücksichtigung von (29), daß $r_1=r_2=\text{const.}$ ist, d. h. *die Fläche hat nur Nabelpunkte.*

Der Fall, daß auf der Fläche die Gauss sche Krümmung

$$K=\frac{1}{r_1 r_2}=\text{const.} \tag{31}$$

ist, erledigt sich ähnlich. Ich subtrahiere auf beiden Seiten von (25) das Integral $2\iint\sqrt{K}(\mathfrak{x}\xi)\,d\sigma$ (Wurzeln werden in diesen Betrachtungen nur positiv genommen) und auf beiden Seiten von (27) das Integral $2\iint\sqrt{K}\,d\sigma$ und erhalte

$$2\iint\{1-\sqrt{K}(\mathfrak{x}\xi)\}\,d\sigma=\iint\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}-\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^2(\mathfrak{x}\xi)\,d\sigma \tag{32}$$

und

$$2\iint\sqrt{K}\{\sqrt{K}(\mathfrak{x}\xi)-1\}\,d\sigma=\iint\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}-\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^2 d\sigma. \tag{33}$$

Die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen sind nichtnegative Größen; daher gilt

$$\iint\{1-\sqrt{K}(\mathfrak{x}\xi)\}\,d\sigma\geqq 0\geqq\iint\sqrt{K}\{1-\sqrt{K}(\mathfrak{x}\xi)\}\,d\sigma. \tag{34}$$

Wenn K, also auch $\sqrt{K}$, konstant ist, folgt aus (34)

$$\iint\{1-\sqrt{K}(\mathfrak{x}\xi)\}\,d\sigma\geqq 0\geqq\iint\{1-\sqrt{K}(\mathfrak{x}\xi)\}\,d\sigma,$$

also

$$\iint\{1-\sqrt{K}(\mathfrak{x}\xi)\}\,d\sigma=0,$$

woraus wieder nach (32)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}-\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^2=0,$$

also nach (31) $r_1=r_2=\text{const.}$ folgt.

Daß die einzigen geschlossenen Flächen mit nur Nabelpunkten die Kugeln sind, schließt man in bekannter Weise.[1])

1) Siehe z. B. W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* I (1924), § 38.

§ 6. Normalkrümmung, geodätische Torsion und Differentialparameter.

Es liegt nahe, für andere wichtige geometrische Größen ähnliche Ausdrücke wie die für die beiden Flächenkrümmungen gefundenen aufzusuchen, *in der Hoffnung, aus der speziellen Darstellung mit Hilfe unserer Fundamentalformeln Integralbeziehungen zu finden.* In der Tat werden die Ausdrücke, die wir finden werden, so einfach sein, daß man sofort sieht, wie man auf sie die Formeln (I) bis (III) anwenden kann.[2]) Ich muß es mir jedoch versagen, alle Integralsätze explizite hinzuschreiben und zu diskutieren, weil dies zu weit führen würde. In diesem Kapitel z. B. werde ich nur die sehr interessanten Darstellungen der geometrischen Größen geben und die Zusammenhänge referieren.

Ich setze in (I) für A den Flächenvektor $\mathfrak{x}$ und für B den Normaleneinheitsvektor ξ ein. Das Kurvenintegral ist immer Null, weil $d\mathfrak{x}$ auf ξ senkrecht steht. Daher ist auch der Integrand des Doppelintegrals überall Null, was die bekannte Bedingung

$$[\mathfrak{x}_u \xi_v] = \mathfrak{x}_u \xi_v - \mathfrak{x}_v \xi_u = 0 \tag{35}$$

liefert. Wenn $f = f(u, v)$ eine beliebige Funktion ist, gilt wegen (35) und weil $[\mathfrak{x}_u f_v]$ auf ξ senkrecht steht,

$$[\mathfrak{x}_u (f \cdot \xi)_v] = f[\mathfrak{x}_u \xi_v] + [\mathfrak{x}_u f_v]\xi = 0. \tag{36}$$

Ich denke mir auf der Fläche $\mathfrak{x}$ zwei beliebige einparametrige Kurvenscharen (α) und (β) gegeben, die nicht mit den Parameterkurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ zusammenzufallen brauchen. Den tangentialen Einheitsvektor an die Kurven der einen Schar (α) nenne ich α und nehme ihn als genügend oft differentiierbare Funktion von u und v an. Ebenso sei β der tangentiale Einheitsvektor der Schar (β). Das äußere Produkt $\alpha \times \beta$ hat die Gestalt $f \cdot \xi$, daher ist nach (36)

$$[\mathfrak{x}_u (\alpha \times \beta)_v] = [\mathfrak{x}_u, \alpha_v, \beta] + [\mathfrak{x}_u, \alpha, \beta_v] = 0. \tag{37}$$

Nun untersuche ich die geometrische Bedeutung des gegen Parametertransformation invarianten Ausdrucks

$$A = \frac{[\mathfrak{x}_u, \alpha_v, \beta]}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)}. \tag{38}$$

Nach (8) ist, weil $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ und β auf ξ senkrecht stehen,

$$[\mathfrak{x}_u, \alpha_v, \beta] = [(\mathfrak{x}_u, \xi, \beta)(\alpha_v \xi)]. \tag{39}$$

2) Siehe z. B. (38) [von der (44) und (48) Spezialfälle sind].

Da ferner $(\alpha\xi) = 0$ ist, folgt

$$(40) \qquad (\alpha\xi)_v = \alpha_v\xi + \alpha\xi_v = (\alpha\xi)_u = \alpha_u\xi + \alpha\xi_u = 0.$$

Mit Hilfe von (39) und (40) wird aus (38)

$$(41) \qquad A = -\frac{[(\mathfrak{x}_u, \xi, \beta)\,(\xi_v\alpha)]}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)},$$

und man sieht, daß A nur von den Vektoren α und β abhängt und keinen weiteren Zusammenhang mit den Kurven der Schar (α) hat, wie es nach (38) scheinen könnte, wo α_v auftritt.

Durch Vermittlung von (38) und (41) erhält man aus (37)

$$(37\,a) \qquad -\frac{[(\mathfrak{x}_u, \xi, \beta)\,(\xi_v\alpha)]}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)} + \frac{[(\mathfrak{x}_u, \xi, \alpha)\,(\xi_v\beta)]}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)} = 0.^{3})$$

Ich nehme jetzt die Kurvenscharen (α) und (β) als Parameterkurven, so daß $\mathfrak{x}_u$ zu α und $\mathfrak{x}_v$ zu β parallel und gleichgerichtet ist. Weil dann $\mathfrak{x}_v = \sqrt{\mathfrak{x}_v^2}\,\beta$ ist, ergibt (41)

$$(42) \qquad A = -\frac{(\mathfrak{x}_u, \xi, \beta)\,(\xi_v\alpha)}{(\mathfrak{x}_u, \beta, \xi)\sqrt{\mathfrak{x}_v^2}} = \frac{\xi_v}{\sqrt{\mathfrak{x}_v^2}}\,\alpha.$$

Wenn ich längs irgendeiner Kurve, die β als Tangentenvektor hat, auf der Fläche fortschreite und die Bogenlänge auf ihr mit $s_{(\beta)}$ bezeichne, kann ich ξ als eine Funktion von $s_{(\beta)}$ betrachten, und es ist identisch

$$(42\,a) \qquad \frac{d\xi}{ds_{(\beta)}} = \frac{\xi_v}{\sqrt{\mathfrak{x}_v^2}}.$$

Somit wird aus (42)

$$(43) \qquad A = \frac{d\xi}{ds_{(\beta)}}\,\alpha.$$

Aus dieser Deutung von A folgt: *wenn α senkrecht zu β ist, liefert A bis auf das Vorzeichen die Torsion einer geodätischen Linie, die (auf ihre Bogenlänge bezogen) β als Tangentialvektor besitzt.* Daher kann ich nach (41), wenn ich dort für α z. B. den Ausdruck $\xi \times \beta$ einsetze, *die Gleichung*

$$(44) \qquad \frac{1}{T_{(\beta)}} = -\frac{[(\mathfrak{x}_u, \xi, \beta)\,(\xi_v, \xi, \beta)]}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)}$$

als Definitionsgleichung für die sog. geodätische Torsion $\frac{1}{T_{(\beta)}}$, die zur Richtung β gehört[4]*), auffassen.* Nach dieser Definition hat man sogleich $T_{(\beta)} = T_{(-\beta)}$. Aus

$$(45) \qquad \alpha = \xi \times \beta \quad \text{folgt} \quad \beta = -\xi \times \alpha,$$

3) In (37) entsteht $[\mathfrak{x}_u, \alpha, \beta_v]$ aus $[\mathfrak{x}_u, \alpha_v, \beta]$ durch Vertauschung von α und β, wobei sich noch das Vorzeichen ändert.

4) Die Richtungen auf einer Fläche charakterisiere ich durch entsprechende tangentiale Einheitsvektoren und sage z. B. kurz „die Richtung β".

somit ist

$$\frac{\mathrm{I}}{T_{(\alpha)}} = -\frac{[(\mathfrak{x}_u, \xi, \alpha)(\xi_v, \xi, \alpha)]}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)} = \frac{[(\mathfrak{x}_u, \xi, \alpha)(\xi_v \beta)]}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)}, \tag{46}$$

und (37a) liefert auf (44) und (46) angewandt den Satz: *Sind in einem Punkte der Fläche α und β zwei aufeinander senkrechte Richtungen, so ist*

$$\frac{\mathrm{I}}{T_{(\alpha)}} + \frac{\mathrm{I}}{T_{(\beta)}} = 0. \tag{47}$$

Nun lasse ich in (43) α stetig in β hineinwandern. Nach der geometrischen Bedeutung von (43) entsteht dann *die durch β bestimmte Normalkrümmung* $\frac{\mathrm{I}}{R_{(\beta)}}$ ($R_{(\beta)}$ = Krümmungsradius des durch ξ und β bestimmten Normalschnittes). Nach (41) ist, wenn dort $\alpha = \beta$ gesetzt wird,

$$\frac{\mathrm{I}}{R_{(\beta)}} = -\frac{[(\mathfrak{x}_u, \xi, \beta)(\xi_v \beta)]}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)}. \tag{48}$$

Da die Zähler von (44) und (48) linear von β abhängen, kann ich leicht die Normalkrümmung und geodätische Torsion für eine beliebige Richtung γ berechnen, wenn ich diese Größen für zwei aufeinander senkrechte Richtungen α und β kenne, indem ich in (44) und (48) für β die Richtung $\gamma = x\alpha + y\beta$ einsetze und nach den Richtungskosinus x und y entwickle. Die Ausrechnung, bei der man nur (45) zu beachten braucht, liefert

$$\frac{\mathrm{I}}{R_{(\gamma)}} = \frac{\mathrm{I}}{R_{(\alpha)}} x^2 + \left(\frac{\mathrm{I}}{T_{(\beta)}} - \frac{\mathrm{I}}{T_{(\alpha)}}\right) xy + \frac{\mathrm{I}}{R_{(\beta)}} y^2, \tag{49}$$

$$\frac{\mathrm{I}}{T_{(\gamma)}} = \frac{\mathrm{I}}{T_{(\alpha)}} x^2 + \left(\frac{\mathrm{I}}{R_{(\alpha)}} - \frac{\mathrm{I}}{R_{(\beta)}}\right) xy + \frac{\mathrm{I}}{T_{(\beta)}} y^2. \tag{50}$$

Da in (50) die Diskriminante der quadratischen Form wegen (47) immer kleiner oder gleich Null ist, gibt es im allgemeinen zwei Richtungen, für die die geodätische Torsion verschwindet. Die weitere leicht zu überblickende Fortführung dieser Gedankengänge möchte ich dem Leser überlassen.

*

Gegeben sei eine Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ und eine Größe $A(u, v)$ (Skalar oder Vektor). Ich definiere den Operator ∇ durch

$$\nabla A = \frac{[\mathfrak{x}_u, A_v]}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)}. \tag{51}$$

Mit Hilfe dieses Operators kann man eine Theorie der Differentialparameter begründen. Es ist z. B. $(\nabla A)^2$ der sog. erste Differentialparameter, wenn A ein Skalar ist. Sei B ein zweiter Skalar, dann

ist $(\nabla A)(\nabla B)$ der sog. gemischte Differentialparameter von A und B. Wenn ich ∇ zweimal hintereinander anwende, $\nabla(\nabla A)$, erhalte ich den sog. zweiten Differentialparameter von A usw. Die Verwendung von ∇ hat den Vorteil, daß man leicht mit Hilfe von (I) bis (III) Integralbeziehungen aufstellen kann, die sehr oft leichter und anschaulicher die Lösung des zu behandelnden Problems liefern.

*

Ich dividiere die mittlere Krümmung (7), die Normalkrümmung (48), die geodätische Torsion (44) und ∇A durch die Gauss sche Krümmung (7) und bekomme

$$R_1 + R_2 = -\frac{[\mathfrak{x}_u, \xi_v, \xi]}{(\xi_u, \xi_v, \xi)}, \tag{52}$$

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_{(\beta)}} = -\frac{[(\mathfrak{x}_u, \xi, \beta)(\xi_v, \beta)]}{(\xi_u, \xi_v, \xi)}, \tag{53}$$

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{T_{(\beta)}} = -\frac{[(\mathfrak{x}_u, \xi, \beta)(\xi_v, \xi, \beta)]}{(\xi_u, \xi_v, \xi)}, \tag{54}$$

$$R_1 \cdot R_2 \cdot \nabla A = \frac{[\mathfrak{x}_u, A_v]}{(\xi_u, \xi_v, \xi)}. \tag{55}$$

Nun denke ich mir zwei auf dasselbe u, v-Parametersystem bezogene Flächen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ und $'\mathfrak{x} = '\mathfrak{x}(u, v)$, bei denen in einander entsprechenden[5]) Punkten der Normaleneinheitsvektor ξ gleich ist. Ferner konstruiere ich eine dritte Fläche $''\mathfrak{x}$ durch

$$''\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{x}(u, v) + '\mathfrak{x}(u, v) \tag{56}$$

und bemerke, daß auch $''\mathfrak{x}$ für jeden (u, v)-Wert mit $\mathfrak{x}$ und $'\mathfrak{x}$ den gleichen Normalvektor ξ besitzt. Demgemäß kann ich einen zu ξ senkrechten beliebigen Einheitsvektor β für alle drei Flächen zugleich als Richtung β gelten lassen. Ich kann so in (52) bis (55) die Größen ξ, β und A als für alle drei Flächen zugleich geltend ansehen, und da alle Formeln von dem Flächenvektor $\mathfrak{x}$ nur linear abhängen, kann ich nach (56) sofort folgern[6]):

$$(R_1 + R_2) + ('R_1 + 'R_2) = (''R_1 + ''R_2)\,^7), \tag{57}$$

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_{(\beta)}} + \frac{'R_1 \cdot 'R_2}{'R_{(\beta)}} = \frac{''R_1 \cdot ''R_2}{''R_{(\beta)}}, \tag{58}$$

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{T_{(\beta)}} + \frac{'R_1 \cdot 'R_2}{'T_{(\beta)}} = \frac{''R_1 \cdot ''R_2}{''T_{(\beta)}}, \tag{59}$$

$$R_1 \cdot R_2 \cdot \nabla A + 'R_1 \cdot 'R_2 \cdot '\nabla A = ''R_1 \cdot ''R_2 \cdot ''\nabla A. \tag{60}$$

5) D. h. die zu demselben (u, v)-Wert gehören.

6) Die Akzente sollen die Zugehörigkeit zur betreffenden Fläche andeuten; alle Größen einer Gleichung beziehen sich auf denselben (u, v)-Wert.

7) $\frac{R_1 + R_2}{2}$ nenne ich den mittleren Krümmungsradius.

Im Anschluß an (57) kann ich folgenden Satz aussprechen: *Wenn zwei Flächen(stücke)* $'\mathfrak{x} = '\mathfrak{x}(u, v)$ *und* $''\mathfrak{x} = ''\mathfrak{x}(u, v)$, *deren* Gausssche *Krümmung von Null verschieden ist, auf dieselben Parameter bezogen sind, so daß sie in entsprechenden Punkten denselben Normalvektor* ξ *und denselben mittleren Krümmungsradius besitzen, ist ihre Differenz* $\mathfrak{x}(u, v) = ''\mathfrak{x}(u, v) - '\mathfrak{x}(u, v)$ *entweder eine Minimalfläche oder ein konstanter Vektor.*

Ich muß also noch zeigen, daß $\mathfrak{x}(u, v)$ nicht eine Kurve, d. h. von der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(r)$; $r = r(u, v)$ sein kann. In diesem Falle würde ich eine Parametertransformation vornehmen, indem ich r selbst als ersten Parameter und eine andere Funktion $s = s(u, v)$, die sich mit r zu einer eindeutigen Transformation der u, v ergänzt, als zweiten Parameter wählen würde. Da $\mathfrak{x}$ mit $'\mathfrak{x}$ und $''\mathfrak{x}$ dieselbe Normale ξ besitzt, muß zuerst $\mathfrak{x}_r \xi = 0$ sein. Eine partielle Differentiation nach s liefert, da $\mathfrak{x}$ nur Funktion von r allein ist, $\mathfrak{x}_r \xi_s = 0$, d. h. $\mathfrak{x}_r$ ist senkrecht zu ξ_s. Da weiter $\mathfrak{x}$, weil $R_1 + R_2 = 0$ ist, nach (52) der Gleichung $[\mathfrak{x}_r, \xi_s, \xi] = (\mathfrak{x}_r, \xi_s, \xi) = 0$ genügen muß, ist auch $\mathfrak{x}_r$ zu ξ_s parallel. Es ist also entweder $\mathfrak{x}_r$ oder ξ_s dauernd gleich Null. Letzteres kann nicht sein, weil die Gausschen Krümmungen von $'\mathfrak{x}$ und $''\mathfrak{x}$ von Null verschieden sind, also ist $\mathfrak{x}_r = 0$ oder $\mathfrak{x} = \text{const}$.

Wenn $'\mathfrak{x}$ und $''\mathfrak{x}$ analytische Eiflächen sind, ist der Fall, daß $(''\mathfrak{x} - '\mathfrak{x})$ eine Minimalfläche ist, ausgeschlossen, weil es keine beschränkten geschlossenen Minimalflächen gibt. Daher der Satz: *Wenn zwei analytische Eiflächen durch parallele und gleichgerichtete Normaleneinheitsvektoren aufeinander bezogen sind und in entsprechenden Punkten denselben mittleren Krümmungsradius besitzen, lassen sie sich durch eine Translation zur Deckung bringen.*[8])

§ 7. Die geodätische Krümmung.

Auf einer Fläche befinde sich ein ganz allgemeines Kurvensystem $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ Ferner sei eine Kurvenschar durch die Gleichung $s = s(u, v) = \text{const.}$ gegeben, und $\alpha = \alpha(u, v)$ sei der stetige tangentiale Einheitsvektor an die Kurven $s = \text{const.}$, die durch die Richtung von α einen bestimmten Durchlaufungssinn erhalten. Wir wollen die geometrische Bedeutung von

$$\nabla \alpha = \frac{[\mathfrak{x}_u \alpha_v]}{(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)}, \tag{61}$$

8) Die mir bekannten Beweise operieren mit Kugelfunktionen (z. B. Blaschke, a. a. O. 1).

vorausgesetzt, daß $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi) \neq 0$ ist, für irgendeinen u, v-Wert feststellen. In einer genügend kleinen Umgebung dieses u, v-Wertes, in der man $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi) \neq 0$ annehmen kann[9]), kann man neben s noch eine andere Funktion $r = r(u, v)$ einführen, so daß in diesem Bereich r und s als neue Parameter mit

$$(\mathfrak{x}_r, \mathfrak{x}_s, \xi) > 0 \tag{62}$$

genommen werden können und $r = \text{const.}$ die orthogonalen Trajektorien von $s = \text{const.}$ liefert. Nach dieser Wahl hat man

$$\mathfrak{x}_r \mathfrak{x}_s = 0 \tag{63}$$

und durch geeignete Vorzeichenwahl von r und s

$$\mathfrak{x}_r = \sqrt{\mathfrak{x}_r^2}\,\alpha. \tag{64}$$

Aus $\alpha^2 = 1$ folgt $\alpha \cdot \alpha_s = 0$, was nach (64) zu

$$\mathfrak{x}_r \alpha_s = 0 \tag{65}$$

führt. Nach (62) und (63) ergibt sich

$$(\mathfrak{x}_r, \mathfrak{x}_s, \xi) = \sqrt{\mathfrak{x}_r^2} \cdot \sqrt{\mathfrak{x}_s^2}. \tag{66}$$

(61) nimmt somit im r, s-System nach (65) und (66) die Gestalt

$$\nabla\alpha = -\frac{\mathfrak{x}_s \alpha_r}{\sqrt{\mathfrak{x}_s^2}\sqrt{\mathfrak{x}_r^2}} = -\frac{\mathfrak{x}_s}{\sqrt{\mathfrak{x}_s^2}} \cdot \frac{\alpha_r}{\sqrt{\mathfrak{x}_r^2}} \tag{67}$$

an. $\frac{\mathfrak{x}_s}{\sqrt{\mathfrak{x}_s^2}}$ ist nach (62), (63) und (64) ein zu α senkrechter tangentialer Einheitsvektor, und zwar ist

$$\frac{\mathfrak{x}_s}{\sqrt{\mathfrak{x}_s^2}} = \xi \times \alpha. \tag{68}$$

$\frac{\alpha_r}{\sqrt{\mathfrak{x}_r^2}}$ ist die längs der durch α orientierten Kurve $s = \text{const.}$ genommene Ableitung von α bezogen auf die Bogenlänge der Kurve. *Demnach liefert $\nabla\alpha$ die geodätische Krümmung der orientierten Kurve $s = \text{const.}$, und zwar mit negativem Vorzeichen, wenn die Binormale von $s = \text{const.}$ mit ξ einen spitzen, und mit positivem Vorzeichen, wenn die Binormale mit ξ einen stumpfen Winkel bildet.*

Nach diesem Resultat ist also $\nabla\alpha$ eine von einer Kurve der Schar $s = \text{const.}$ allein abhängige Größe. Wenn ich daher eine Kurve K auf verschiedene Weisen in Kurvenscharen einbette, ist das für einen Punkt der Kurve genommene $\nabla\alpha$ unabhängig davon, wie die Kurvenschar beschaffen ist, in die ich K eingebettet habe. Ich bezeichne den festen Wert, den $\nabla\alpha$ für einen Punkt einer Kurve K der Schar $s = \text{const.}$ liefert, wenn ich K auf ver-

9) Weil ich mindestens Stetigkeit voraussetze.

schiedene Weisen in Kurvenscharen einbetten würde, mit r_g. Nach (61) ist

$$[\mathfrak{x}_u, \alpha_v]\,du\,dv = r_g(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi)\,du\,dv = r_g\,d\sigma, \tag{69}$$

und diese Gleichung gilt, falls r_g eine stetige und beschränkte Funktion von u und v ist, nicht nur wenn $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi) \neq 0$ ist, sondern auch für die u, v-Werte, für die $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi) = 0$ ist.

Wenn ich in (I) für A und B die Vektoren $\mathfrak{x}$ und α einsetze, erhalte ich nach (69)

$$\int d\mathfrak{x} \cdot \alpha + \iint r_g\,d\sigma = 0. \tag{70}$$

Auf einer Fläche sei folgendes spezielle Kurvennetz gegeben (Fig. 1): Die Kurven $v = \text{const.}$ sollen für $u = 0$ und $u = 1$ durch die Punkte P und Q laufen. In ihrem Verlauf zwischen P und Q sollen die Kurven $v = \text{const.}$ sich nicht überschneiden, und für $0 < u < 1$ sei immer $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi) > 0$, d. h. die Kurven bilden zwischen P und Q ein Feld. $\alpha = \alpha(u, v)$ sei der stetige tangentiale Einheitsvektor an $v = \text{const.}$ und möge die Kurven von P nach Q orientieren. Für eine Kurve $v = v_0$ sei zwischen P und Q immer $r_g \geqq \varepsilon > 0$ ($\varepsilon =$ feste Zahl). Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit gibt es bei vorgegebenem $\frac{\varepsilon}{2}$ ein δ, so daß für alle v, die der Ungleichung $|v - v_0| \leqq \delta$ genügen, die zugehörigen Kurven in ihrem Verlaufe zwischen P und Q eine geodätische Krümmung $r_g \geqq \frac{\varepsilon}{2}$ haben. $v_1 < v_2$ seien zwei beliebige v-Werte, die dieser Ungleichung genügen. Die Formel (70) wird nun auf das Rechteck der u, v-Ebene, das von den Geraden $u = 0$, $u = 1$, $v = v_1$ und $v = v_2$ gebildet wird, angewandt. Längs der Geraden $u = 0$ und $u = 1$ hat das Kurvenintegral den Wert Null, weil auf ihnen nach Voraussetzung $d\mathfrak{x} = 0$ ist. Für $v = v_1$ liefert das Kurvenintegral die Bogenlänge $(PQ)_{v_1}$ des Kurvenstücks PQ der Kurve $v = v_1$, weil, da $d\mathfrak{x}$ parallel und gleichgerichtet zu α ist, $d\mathfrak{x} \cdot \alpha$ gleich dem Bogenelement von $v = v_1$ ist. Für $v = v_2$ liefert das Kurvenintegral analog die negative Bogenlänge $-(PQ)_{v_2}$ des Kurvenstücks PQ von $v = v_2$, weil dies Kurvenstück in zu α entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Das Randintegral ergibt also insgesamt: $(PQ)_{v_1} - (PQ)_{v_2}$. Das Doppelintegral ist eine wesentlich positive Größe, weil $r \geqq \frac{\varepsilon}{2}$ und bis auf $u = 0$ und $u = 1$ immer $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi) > 0$ ist. Da $v_1 < v_2$ beliebig waren, folgt, daß die Bogenlänge des dem Parameter v entsprechenden und zwischen P und Q gelegenen Kurvenstücks in der Umgebung von v_0

eine mit v eigentlich monoton wachsende Funktion ist. Wenn für $v = v_0$ die geodätische Krümmung der Bedingung $r_g \leqq -\varepsilon < 0$ genügt hätte, hätte sich analog für die Bogenstücke eine mit v abnehmende Funktion ergeben. Aus diesem Ergebnis folgt: die Bogenlänge eines Kurvenstücks PQ, auf dem $|r_g| \geqq \varepsilon > 0$ ist, kann in bezug auf benachbarte Kurvenstücke kein Minimum sein, weil man es in eine Schar der eben besprochenen Art einbetten kann.

Ein Kurvenstück RS, dessen Bogenlänge in bezug auf benachbarte Kurvenstücke ein Minimum sein soll, muß überall die geodätische Krümmung Null haben, weil jedes beliebige Teilstück PQ von RS ebenfalls diese Extremumeigenschaft haben muß. Eine Kurve, auf der immer $r_g = 0$ ist, nennt man eine geodätische Linie.

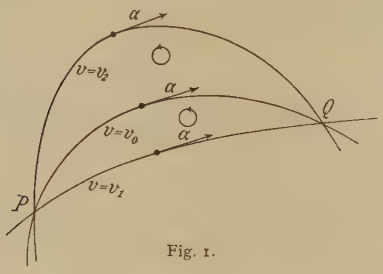

Fig. 1.

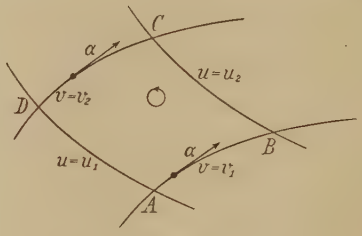

Fig. 2.

Aus der Allgemeingültigkeit der Formel (70) folgt: *Hinreichend dafür, daß in einem Punkte einer Kurve einer Kurvenschar mit dem tangentialen Einheitsvektor α die geodätische Krümmung gleich Null ist, ist die Existenz irgendeiner Folge von eigentlichen zweidimensionalen Bereichen, die alle diesen Punkt enthalten und deren Durchmesser gegen Null geht, wobei für jeden Bereich der Folge die Beziehung $\int d\mathfrak{x}\,\alpha = 0$ längs des Randes dieses Bereiches gilt.*

Weiter betrachten wir eine Schar geodätischer Linien $v = \text{const.}$ mit dem tangentialen Einheitsvektor α und ihre orthogonalen Trajektorien $u = \text{const.}$ und wenden die Formel (70) auf das Rechteck

$$u_1 \leqq u \leqq u_2; \quad v_1 \leqq v \leqq v_2$$

an (Fig. 2). Da längs der Kurven $u_1 = \text{const.}$ und $u_2 = \text{const.}$ die Größe $d\mathfrak{x} \cdot \alpha$ gleich Null ist, so bleiben vom Randintegral nur noch die Integrale längs der Kurven AB und CD, die gleich der Bogenlänge L_1 und L_2 dieser Kurvenstücke sind. Weil r_g gleich Null ist, fällt das Doppelintegral fort und es bleibt allein übrig

$$\int_A^B d\mathfrak{x}\,\alpha + \int_C^D d\mathfrak{x}\,\alpha = L_1 - L_2 = 0$$

oder in Worten:

Die orthogonalen Trajektorien einer Schar geodätischer Linien schneiden von diesen gleiche Bogenlängen ab.

Nach der oben angegebenen hinreichenden Bedingung für das Verschwinden der geodätischen Krümmung läßt sich dieser Satz sofort umkehren:

Schneiden die orthogonalen Trajektorien einer Kurvenschar von dieser gleiche Bogenlängen ab, so besteht die Schar aus geodätischen Linien.

Schließlich betrachten wir (Fig. 3) eine Schar geodätischer Linien, die von einem Punkte A ausgehen und eine Enveloppe BC besitzen mögen. Die Anwendung der Formel (70) auf den Bereich ABC und die Schar der geodätischen Linien liefert, wenn die Längen der Kurvenstücke AC, BC und AB mit $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AB}$ bezeichnet werden,

$$\int_A^C d\mathfrak{x} \cdot \alpha + \int_C^B d\mathfrak{x} \cdot \alpha + \int_B^A d\mathfrak{x} \cdot \alpha = 0$$

oder

$$\overline{AC} - \overline{BC} - \overline{AB} = 0.$$

§ 8. Das zweiparametrige orthogonale Dreibein.

Wir denken uns ein aus den Einheitsvektoren ξ_1, ξ_2 und ξ_3 gebildetes orthogonales Dreibein, dessen Lage im Raum von zwei Parametern u und v abhängen soll. Wir setzen in der Fundamentalformel (I) für A und B die Werte ξ_2 und ξ_3 ein und erhalten dann

$$\int d\xi_2 \cdot \xi_3 + \iint [\xi_{2u} \xi_{3v}]\, du\, dv = 0.^{10}) \tag{71}$$

Wir behaupten nun, daß folgende Gleichung besteht:

$$[\xi_{2u} \xi_{3v}] = (\xi_{1u} \xi_{1v} \xi_1). \tag{72}$$

Beweis: Da die Vektoren ξ_1, ξ_{2u} und ξ_{2v} auf dem Vektor ξ_2 und die Vektoren ξ_1, ξ_{3u}, ξ_{3v} auf dem Vektor ξ_3 senkrecht stehen, so müssen die Vektoren

$$\xi_1 \times \xi_{2u} \quad \text{und} \quad \xi_1 \times \xi_{2v} \quad \text{parallel mit } \xi_2$$

und

$$\xi_1 \times \xi_{3u} \quad \text{und} \quad \xi_1 \times \xi_{3v} \quad \text{parallel mit } \xi_3$$

sein. Hieraus folgt nun, da $\xi_2 \xi_3 = 0$ ist, daß ebenfalls

$$\alpha = (\xi_1 \times \xi_{2u})(\xi_1 \times \xi_{3v}) = 0$$

und

$$\beta = (\xi_1 \times \xi_{2v})(\xi_1 \times \xi_{3u}) = 0$$

10) Die alternierende Wirkung der eckigen Klammern bezieht sich nur auf die Buchstabenindizes u und v und nicht auf die Zahlenindizes 1, 2 und 3.

ist. Nach dem Entwicklungssatz ist

$$\alpha = (\xi_{2u}\,\xi_{3v}) - (\xi_{2u}\,\xi_1)\,(\xi_{3v}\,\xi_1) = 0$$
$$\beta = (\xi_{2v}\,\xi_{3u}) - (\xi_{2v}\,\xi_1)\,(\xi_{3u}\,\xi_1) = 0.$$

Durch Subtraktion von α und β erhält man

$$\alpha - \beta = [\xi_{2u}\,\xi_{3v}] - (\xi_{2u}\,\xi_1)\,(\xi_{3v}\,\xi_1) + (\xi_{2v}\,\xi_1)\,(\xi_{3u}\,\xi_1) = 0.$$

Wegen der gegenseitigen Orthogonalität der Einheitsvektoren kann ich in jedem der inneren Produkte auf der rechten Seite dieser Gleichung unter gleichzeitiger Änderung des Vorzeichens die Indizes vertauschen. Also kommt

$$[\xi_{2u}\,\xi_{3v}] = (\xi_{1u}\,\xi_2)\,(\xi_{1v}\,\xi_3) - (\xi_{1v}\,\xi_2)\,(\xi_{1u}\,\xi_3).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber wieder identisch mit

$$(\xi_{1u} \times \xi_{1v})\,(\xi_2 \times \xi_3) = (\xi_{1u} \times \xi_{1v})\,\xi_1 = (\xi_{1u}, \xi_{1v}, \xi_1),$$

wie aus dem Entwicklungssatz folgt. Damit ist die Integralbeziehung

$$\text{(IV)} \qquad \int d\,\xi_2 \cdot \xi_3 + \iint (\xi_{1u}, \xi_{1v}, \xi_1)\,du\,dv = 0$$

bewiesen. Durch zyklische Vertauschung der Indizes ergeben sich hieraus noch zwei weitere Beziehungen.

Es sei noch bemerkt, daß Formel (IV) auch eine geometrische Bedeutung besitzt. Wenn wir nämlich die Dreibeine parallel bis zu einem festen Punkt verschieben, liegen die Enden der Dreibeinvektoren auf der Einheitskugel. Indem dann jedem Punkte eines Bereiches B der u, v-Ebene durch den Endpunkt des Einheitsvektors ξ_ν eindeutig ein Punkt der Einheitskugel zugeordnet ist, entsprechen dem Bereich B drei Bereiche B_ν ($\nu = 1, 2, 3$) auf der Einheitskugel. *Das Doppelintegral in unserer Formel* (IV) *liefert dann den Flächeninhalt eines Bereiches B_ν auf der Kugel.*[11])

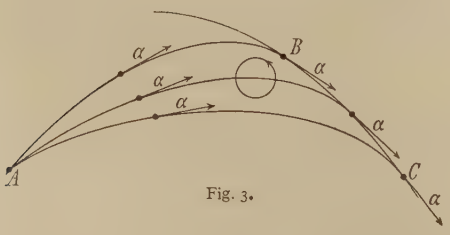

Fig. 3.

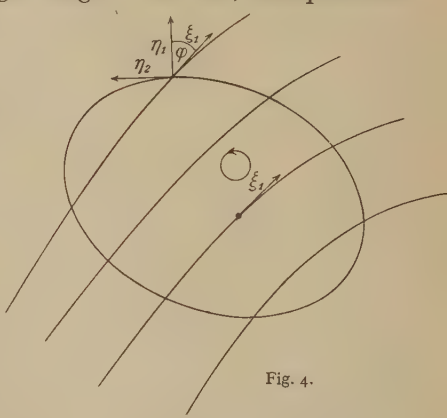

Fig. 4.

Als erste Anwendung der Formel (IV) werde mit ihrer Hilfe der Satz von Gauss-Bonnet abgeleitet: Man betrachte (Fig. 4) irgendeine Kurvenschar $v = \text{const.}$ mit dem Tangentialeinheitsvektor ξ_1. Der

11) Natürlich in unserer Auffassung als Flächeninhalt eines u, v-Kurvennetzes.

Normalenvektor der Fläche werde mit ξ oder ξ_3 bezeichnet. Durch passende zyklische Vertauschung der Indizes erhalten wir aus (IV) die Gleichung

$$\int d\xi_1 \cdot \xi_2 + \iint (\xi_u, \xi_v, \xi)\, du\, dv = 0, \tag{73}$$

wo ξ_2 durch $\xi \times \xi_1$ gegeben ist, also der dritte Dreibeinvektor zu ξ und ξ_1 ist. *Diese Formel* (73) *ist schon der* Gauss-Bonnetsche *Satz von der curvatura integra.* In der Tat, nach (7) ist

$$(\xi_u, \xi_v, \xi)\, du\, dv = \frac{d\sigma}{R_1 R_2} = K\, d\sigma.$$

Nun bleibt noch die geometrische Bedeutung des Randintegrals zu ergründen. Wir bezeichnen den Tangentialeinheitsvektor an die Berandung mit η_2 und den dazu senkrechten Tangentialvektor mit

$$\eta_1 = \eta_2 \times \xi.$$

Der Winkel zwischen η_1 und ξ_1 sei φ. Am elegantesten wird die weitere Rechnung durch Einführung von Rotationsvektoren. Es sei Q der absolute[12]) Rotationsvektor des Dreibeins ξ_1, ξ_2, ξ_3; S der absolute Rotationsvektor des Dreibeins η_1, η_2, ξ_3 und R der relative Rotationsvektor des Dreibeins η_1, η_2, ξ_3 in bezug auf das Dreibein ξ_1, ξ_2, ξ_3, wobei bei allen Rotationsvektoren die Bogenlänge s der Umrandung als Parameter benutzt ist. Z. B. ist so

$$Q \times \xi_1 = \frac{d\xi_1}{ds} \quad \text{usw.}$$

Der relative Rotationsvektor R ist leicht anzugeben. Es ist nämlich

$$R = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \xi. \tag{74}$$

Weiterhin benutzen wir die bekannte Beziehung

$$S = Q + R \quad \text{oder} \quad Q = S - R. \tag{75}$$

Nun ist nach (75)

$$d\xi_1 = \frac{d\xi_1}{ds} \cdot ds = (Q \times \xi_1)\, ds = (S \times \xi_1)\, ds - (R \times \xi_1)\, ds,$$

woraus folgt $\quad d\xi_1 \cdot \xi_2 = (Q \cdot \xi_3)\, ds = (S \cdot \xi_3)\, ds - d\varphi.$

Für $S \cdot \xi_3$ können wir aber rückwärts wieder setzen

$$S\xi_3 = S(\eta_1 \times \eta_2) = -(S \times \eta_2)\eta_1 = -\frac{d\eta_2}{ds}\eta_1.$$

---

12) Absolut, weil in bezug auf den Fundamentalraum genommen. Ferner beachte man: da der Rand aus stückweis glatten Kurven bestehen kann, ist S mit R und η_1 an denselben Sprungstellen unstetig, während Q überall stetig ist.

Nach den Überlegungen im Anschluß an Formel (67) ist dies aber, weil η_2 dem α und η_1 dem negativen $\frac{\mathfrak{x}_s}{\sqrt{\mathfrak{x}_s^2}}$ entspricht, gleich der negativen geodätischen Krümmung $-r_g$ des Randes. Wir erhalten also endgültig aus der Formel (73) die Beziehung

$$-\int r_g ds - \int d\varphi + \iint \frac{ds}{R_1 R_2} = 0. \tag{76}$$

Für eine zweite Anwendung der Formel (IV) sei eine Schar geschlossener Raumkurven in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ gegeben, wo v der Scharparameter und u der Kurvenparameter sein möge. Wir nehmen als orthogonales Dreibein das sog. begleitende Dreibein der Kurve:

$$\xi_1 = \text{Tangentenvektor} = \frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{\mathfrak{x}_u^2}},$$
$$\xi_2 = \text{Hauptnormalenvektor},$$
$$\xi_3 = \text{Binormalenvektor}.$$

Differentiieren wir diese Vektoren nach u, so erhalten wir folgendes Schema:

$$\begin{aligned} \xi_{1u} &= \frac{\xi_2}{\varrho} \\ \xi_{2u} &= -\frac{\xi_1}{\varrho} + \frac{\xi_3}{\tau} \\ \xi_{3u} &= -\frac{\xi_2}{\tau}, \end{aligned} \tag{77}$$

das für $u = s =$ Bogenlänge der Kurve in das Schema der Frenetformeln übergeht. Der Parameter u soll bei allen Kurven von u_0 bis u_1 die ganze Kurve durchlaufen, und für u_0 und u_1 bei beliebigem v mögen $\mathfrak{x}$ und alle partiellen Ableitungen von $\mathfrak{x}$ die gleichen Werte besitzen:

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial u^n \partial v^m} \mathfrak{x}(u_0, v) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial u^n \partial v^m} \mathfrak{x}(u_1, v). \tag{78}$$

Zuerst nehmen wir folgenden Fall der Formel (IV):

$$\int d\xi_3 \cdot \xi_1 + \iint (\xi_{2u}, \xi_{2v}, \xi_2)\, du\, dv = 0, \tag{79}$$

integrieren über den Bereich B

$$v_0 \leqq v \leqq v_1; \qquad u_0 \leqq u \leqq u_1$$

und erhalten dann

$$\int\limits_{v=v_0} d\xi_3 \cdot \xi_1 - \int\limits_{v=v_1} d\xi_3 \cdot \xi_1 + \iint\limits_B (\xi_{2u}, \xi_{2v}, \xi_2)\, du\, dv = 0,$$

weil die Randintegrale für $u = u_0$ und $u = u_1$ entgegengesetzt gleich sind. Hier sind die Randintegrale längs der ganzen Kurven $v_0 = \text{const}$.

und $v_1 = \text{const.}$ genommen, wobei die Kurven im Sinne ihrer Tangenten ξ_1 durchlaufen werden. Nach dem Schema der FRENET-formeln ist aber

$$d\xi_3 \cdot \xi_1 |_{v=\text{const.}} = \xi_{3u} \cdot \xi_1 \cdot du = -\frac{\xi_2}{\tau} \xi_1 \cdot du = 0;$$

daraus folgt $$\iint_B (\xi_{2u}, \xi_{2v}, \xi_2)\, du\, dv = 0$$

oder in Worten:

Das durch die Hauptnormale vermittelte sphärische Bild einer Schar geschlossener Raumkurven hat den Flächeninhalt Null.

Durch zyklische Vertauschung der Zahlenindizes in (79) leitet man in leicht ersichtlicher Weise mit Hilfe von (77) noch zwei andere Integralbeziehungen ab, die aufzuschreiben sich erübrigt.

Lebenslauf.

Ich bin am 25. September 1904 als Sohn des Buffetier Arthur Scholz geboren worden und bin evangelischer Konfession. Ich besuchte zuerst die Vorschule des Kgl. Luisen-Gymnasiums zu Berlin-Moabit, dann wurde ich in die Sexta des Herder-Reform-Realgymnasiums zu Berlin-Charlottenburg eingeschult. In Untersekunda ging ich zum Goethe-Reform-Realgymnasium über, wo ich 1925 die Reifeprüfung ablegte. Ostern 1925 wurde ich in der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin immatrikuliert und hörte philosophische Vorlesungen bei den Herren Professoren Hochstetter, Maier, Liebert, Köhler, Rieffert, physikalische Vorlesungen bei den Herren Professoren Hettner, Nernst, Planck, Schrödinger und Wehnelt, mathematische Vorlesungen bei den Herren Professoren Bieberbach, Feigl, Hammerstein, Hopf, Loewner, von Mises, Szegö, Erhard Schmidt, I. Schur.

Allen diesen Herren danke ich für die schönen Stunden, die ich bei ihnen gehört habe. Zu besonderem Danke bin ich aber Herrn Prof. Dr. Bieberbach verpflichtet, einmal wegen der großen Geduld und Hilfsbereitschaft, mit der er mir mit vielen Ratschlägen geholfen hat und die vielen kleinen Sorgen des Doktoranden beschwichtigte, sodann wegen der mannigfachen Anregungen, die ich in seinen Vorlesungen, besonders den höheren, erhielt und die dadurch, daß sie meine wissenschaftliche Neugierde reizten, in besonderem Maße zu meiner wissenschaftlichen Ausbildung beigetragen haben.